

Kombinatorik: Die Kunst zu zählen (Leistungskurs)

Einführung: Um Wahrscheinlichkeiten berechnen zu können, muss man wissen wie viele Ergebnisse können überhaupt in Betracht kommen. Beim Würfel sind dies z.B. 6 Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Zahl zu würfeln beträgt also 1 zu 6, bzw. $\frac{1}{6}$.

Aber nicht immer lässt sich die Anzahl aller Ergebnisse so einfach bestimmen. Damit beschäftigt sich die Kombinatorik.

-
1. Fall: Ein Restaurant hat 2 Vorspeisen, 5 Hauptgerichte und 4 Desserts. Wie viele unterschiedliche Menüs kann man wählen?

Lösung: $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$

Hier werden also alle Ergebnisse miteinander multipliziert und man erhält 40 Möglichkeiten.

-
2. Fall: 5 Schüler sollen sich auf 5 Plätze verteilen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es hierzu?

Überlegung: Der erste kann zwischen 5 Möglichkeiten wählen, der zweite zwischen 4, der dritte zwischen 3, usw., usw

Also gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten

Man schreibt für diese Rechnung kurz: $5!$ (5 Fakultät)

$$\begin{aligned}\text{Es gilt: } 4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \\ 1! &= 1 \\ 0! &= 1 (\leftarrow \text{per Definition!})\end{aligned}$$

Stichproben in der Kombinatorik

Gehen wir zunächst von einer Urne aus, in der durchnummerierte Kugeln liegen. Nun kann man eine bestimmte Anzahl k aus n -Elementen auswählen. Daher kann man:

- Die Reihenfolge beachten (geordnete Stichprobe). Es ist also ein Unterschied ob man $\{2;5\}$ oder $\{5;2\}$ zieht. Jede Kombination wird extra gezählt.
- Die Reihenfolge nicht beachten (ungeordnete Stichprobe)
- Die Kugeln zurücklegen (mit Wiederholung)
- Die Kugeln nicht zurücklegen (ohne Wiederholung)

Daraus ergeben sich also 4 Fälle:

1. Fall: Geordnete Stichprobe mit Wiederholung

Aus einer n -elementigen Menge wird k -Mal eine Kugel gezogen und anschließend wieder zurückgelegt. Daher ergeben sich $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$ Möglichkeiten.

Beispiel: Man würfelt 3 Mal. Für den Ergebnisraum gibt es also $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ Möglichkeiten. So ist also die Wahrscheinlichkeit, dass z.B. $\{4;4;4\}$ kommt 1 zu 216.

Nächste Aufgabe: Wie viele Möglichkeiten gibt es 3 Lichter einer Lichtorgel zu schalten? Jedes Licht kann an oder aus sein (Also 2 Zustände) und es gibt 3 Lichter, also ist das so, als ob in einer Urne 2 Kugeln (weiß für an und schwarz für aus) liegen würden und man 3mal mit zurücklegen zieht: Daraus ergibt sich: $2^3 = 8$ Möglichkeiten. Klar: Die Reihenfolge spielt hier eine Rolle.

2. Fall: Geordnete Stichprobe ohne Wiederholung

Wie ziehen aus einer Urne 3 von 5 Kugeln, die wir nicht zurücklegen.

Frage: Wie viele 3er Teilmengen kann ich aus 5 Kugeln bilden?

Lösung:

Wir ziehen also aus der Urne 3 Kugeln ohne zurücklegen.

Für die erste Kugel haben wir 5 Möglichkeiten, für die zweite 4 und für die dritte 3 Möglichkeiten.

Also: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Als Formel ausgedrückt: $5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$

Aus einer n-elementigen Menge kann man also $\frac{n!}{(n-k)!}$ geordnete Stichproben mit k Elementen entnehmen.

3. Fall: Ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholung

Im vorherigen Fall der geordneten Stichprobe wird bei der Frage, wie viele 3er Teilmengen man bilden kann, unterschieden zwischen $\{1\ 2\ 3\}$, $\{2\ 3\ 1\}$, $\{3\ 1\ 2\}$ usw.

Bei der ungeordneten (= ohne Beachtung der Reihenfolge) Stichprobe zählt dies nur als *eine* Teilmenge.

Es gibt weniger Möglichkeiten, also muss man noch durch die Anzahl der „Vertauschungen“ teilen.

(Hier 6 Vertauschungen: $\{1\ 2\ 3\} \{1\ 3\ 2\} \{2\ 1\ 3\} \{2\ 3\ 1\} \{3\ 2\ 1\} \{3\ 1\ 2\}$)

Wir kürzen also durch 6 Möglichkeiten, die man mit 3! berechnet: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$

Oder als Formel: Sei n Anzahl aller Elemente und k Anzahl der Teilmengen.

$$10 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(3)!} = \frac{5!}{(5-3)!(3)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \text{ (Sprich: n über k)}$$

Diese Formel heißt der Binomialkoeffizient. Dabei gilt, wie man durch nachrechnen schnell zeigt: $\binom{n}{0} = 1$ und

$$\binom{n}{n} = 1$$

4. Fall: Ungeordnete Stichprobe mit Wiederholung

Auf wie viele Arten, kann man 5 Stück Torte (T) auf 3 Personen aufteilen?

Eine mögliche Aufteilung wäre: TTT | TT | oder T | TTT | T. Im Grunde stellt sich also die Frage: Wie kann man also 5 mal das Element T und 2 mal das Element |, also insgesamt 7 Elemente verteilen. Somit kann man auch fragen: Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei der 7 Plätze für | oder 5 der 7 Plätze für T zu verteilen.

Das bringt uns zu folgender Rechnung, wenn n= 3 und k =5 ist (Also 3 Personen liegen in der Urne und werden 5 mal gezogen:

$$\binom{7}{2} = \binom{7}{5} = 21 \text{ oder allgemein formuliert: } \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Ein weiteres Beispiel: Auf wie viele Arten kann man 7 (= k) ununterscheidbare Mäuse auf 3 (= n) Käfige verteilen?

Es gilt: $\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = 36$ Es gibt also 36 Möglichkeiten!

Dies Fall kann man leicht verwechseln mit Fall 1, wenn man denkt. Die erste Maus hat 3 Käfige zur Auswahl, die zweite Maus hat ebenso 3 Käfige zur Auswahl und so weiter. Also $3^7 = 2187$. Das sind viel mehr Möglichkeiten als Fall 4, da die Reihenfolge beachtet wird. Für unsere Fragestellung ist es aber egal, ob zuerst Maus 1 oder Maus 2 in den Käfig gesetzt wurde oder umgekehrt. Hauptsache beide sind am Schluss im Käfig. Daher zählt dies nicht als unterschiedlicher Fall.

Übungsblatt zu Kombinatorik (Nur Stichprobe)

- Die neue Flagge von Oktopan soll aus drei parallelen verschiedenfarbigen Streifen bestehen. Wie viele Möglichkeiten gibt es bei 10 Farben?
- Bei einem Turnier treten 8 Mannschaften an. Wie viele Paarungen sind möglich?
- Beim Fußballtoto (11er-Wette) sind für 11 Spielpaarungen die Zahlen 0, 1, 2 einzutragen. Wie viele Tipps sind möglich?
- Auf 3 Eierkartons sollen 8 Eier verteilt werden. Auf wie viele Arten ist dies möglich?

1. Fall	2. Fall	3. Fall	4. Fall
Geordnet mit Wiederholung	Geordnet ohne Wiederholung	Ungeordnet ohne Wiederholung	Ungeordnet mit Wiederholung
Formel: n^k	Formel: $\frac{n!}{(n-k)!}$	Formel: $\frac{n!}{(n-k)!k!}$	Formel: $\binom{n+k-1}{k}$
Fußballtoto: 11 Spielpaarungen 3 Ergebnismöglichkeiten n = 3 k = 11 $3^{11} = 177.147$	Flagge von Oktopan: drei verschiedenfarbige Streifen 10 verschiedene Farben n = 10 k = 3 $\frac{10!}{(10-3)!} = 720$	Tunier mit 8 Mannschaften: 8 Mannschaften 2 Mannschaften pro Spiel n = 8 k = 2 $\frac{8!}{(8-2)!2!} = 28$	8 Eier auf 3 Eierkartons verteilen: 8 Eier 3 Eierkartons n = 3 k = 8 $\binom{3+8-1}{8} = 45$
In einer Schulklasse sind 12 Schülerinnen und 16 Schüler. Es sollen draus 4 Schülerinnen und 5 Schüler als Helfer für ein Schulfest ausgewählt werden, Auf wie viele Arten ist das möglich? $\binom{12}{4} \cdot \binom{16}{5} = 2.162.160$ mögliche Arten Schüler und Schülerinnen für das Schulfest auszuwählen			

Übungsblatt zu Kombinatorik (Nur Stichprobe)

- Die neue Flagge von Oktopan soll aus drei parallelen verschiedenfarbigen Streifen bestehen. Wie viele Möglichkeiten gibt es bei 10 Farben?
- Bei einem Turnier treten 8 Mannschaften an. Wie viele Paarungen sind möglich?
- Beim Fußballtoto (11er-Wette) sind für 11 Spielpaarungen die Zahlen 0, 1, 2 einzutragen. Wie viele Tipps sind möglich?
- Auf 3 Eierkartons sollen 8 Eier verteilt werden. Auf wie viele Arten ist dies möglich?

1. Fall	2. Fall	3. Fall	4. Fall
Geordnet mit Wiederholung	Geordnet ohne Wiederholung	Ungeordnet ohne Wiederholung	Ungeordnet mit Wiederholung
Formel:	Formel:	Formel:	Formel:
n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{(n-k)!k!}$	$\binom{n+k-1}{k}$

In einer Schulklasse sind 12 Schülerinnen und 16 Schüler. Es sollen draus 4 Schülerinnen und 5 Schüler als Helfer für ein Schulfest ausgewählt werden, Auf wie viele Arten ist das möglich?

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{16}{5} = 2.162.160 \quad \text{mögliche Arten Schüler und Schülerinnen für das Schulfest auszuwählen}$$